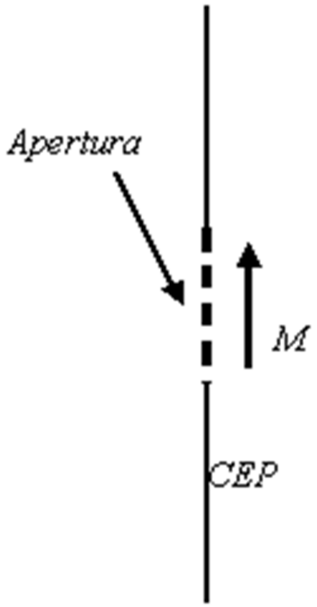
CAMPO LONTANO GENERATO DA UNA APERTURA

Potenziale Vettore Magnetico

Per il campo di sorgenti magnetiche (aperture) occorre utilizzare il duale del potenziale vettore **A** (utilizzato per le correnti elettriche) che viene indicato con **F** e viene detto potenziale vettore magnetico o di Fitzgerald.

Dalle equazioni di Maxwell si ha, in presenza di sole correnti magnetiche:



$$\begin{cases} \nabla \times \underline{E} = -j\omega\mu \underline{H} - \underline{M} \\ \nabla \times \underline{H} = j\omega\varepsilon \underline{E} \\ \nabla \cdot \underline{E} = 0 \\ \nabla \cdot \mu \underline{H} = \rho_m \end{cases}$$

CAMPO LONTANO GENERATO DA UNA APERTURA

Potenziale Vettore Magnetico

Dalla terza equazione si ha che il campo elettrico è solenoidale, per cui può essere espresso come il rotore di una certa funzione **F**:

$$\underline{E} = \nabla \times \underline{F}$$

Sostituendo nella seconda equazione si ha:

$$\nabla \times \left(\underline{H} - j\omega\varepsilon \underline{F}\right) = 0$$

Quindi la funzione $\underline{\boldsymbol{H}}$-$j\omega\varepsilon\underline{\boldsymbol{F}}$ è irrotazionale, e può essere derivata dal gradiente di una funzione scalare:

$$\underline{H} - j\omega\varepsilon \underline{F} = \nabla \phi_m \qquad \rightarrow \qquad \underline{H} = j\omega\varepsilon \underline{F} + \nabla \phi_m$$

CAMPO LONTANO GENERATO DA UNA APERTURA

Potenziale Vettore Magnetico

Sostituendo nella prima equazione di Maxwell si ha:

$$\nabla \times \left(\nabla \times \underline{F}\right) = -j\omega\mu\left(j\omega\varepsilon \underline{F} + \nabla \phi_m\right) - \underline{M} \qquad \rightarrow \qquad \nabla \times \left(\nabla \times \underline{F}\right) = k^2 \underline{F} - j\omega\mu\nabla\phi_m - \underline{M}$$

con $k^2=\omega^2\varepsilon\mu$.

Sviluppando il primo membro si ha (essendo $\nabla \times \left(\nabla \times \underline{F}\right) = \nabla\left(\nabla \cdot \underline{F}\right) - \nabla^2 \cdot \underline{F}$):

$$\nabla^2 \underline{F} + k^2 \underline{F} = \underline{M} + \nabla\left(\nabla \cdot \underline{F} + j\omega\mu\phi_m\right)$$

e, assumendo la gauge di Lorentz $\nabla \cdot \underline{F} + j\omega\mu\phi_m = 0$, segue:

$$\nabla^2 \underline{F} + k^2 \underline{F} = \underline{M}$$

CAMPO LONTANO GENERATO DA UNA APERTURA

Potenziale Vettore Magnetico

La soluzione di questo problema con correnti magnetiche è duale al caso di correnti elettriche; è sufficiente scambiare il termine "elettrico" con "magnetico" e scambiare i campi.

Per cui anche le soluzioni dell'equazione agli autovalori sul potenziale saranno analoghe.

Di conseguenza, se ho un dipolo magnetico con $\underline{\mathbf{M}}=M_D\underline{\mathbf{i}}_z\delta(\underline{\mathbf{r}}-\underline{\mathbf{r}}_0)$, allora (posto $R=|\underline{\mathbf{r}}-\underline{\mathbf{r}}_0|$) il potenziale vettore magnetico vale:

$$\underline{F} = -\frac{1}{4\pi}\frac{e^{-jkR}}{R}M_D\underline{i}_z$$

CAMPO LONTANO GENERATO DA UNA APERTURA

Potenziale Vettore Magnetico

Un tale approccio è utile nel calcolo del campo lontano.

Per il campo lontano vale una relazione del tipo:

$$\underline{E} = \zeta\, \underline{H} \times \underline{i}_r + o(1/r)$$

e quindi a meno di infinitesimi di ordine superiore ad 1/r i campi elettrico e magnetico sono legati da una relazione tipo onda piana (il campo elettromagnetico a grande distanza è un'onda localmente piana).

Il campo lontano dovuto al dipolo magnetico può dunque scriversi come:

$$\underline{E}_\infty(\vartheta,\varphi,r) = \underline{E}_0(\vartheta,\varphi)\frac{e^{-jkr}}{r} + o(1/r)$$

CAMPO LONTANO GENERATO DA UNA APERTURA

Potenziale Vettore Magnetico

Sostituendo l'espressione appena trovata per il campo elettrico nelle eq. Maxwell, ottengo:

$$\nabla\times\underline{E}_\infty(\vartheta,\varphi,r)=\nabla\times\left(\underline{E}_0(\vartheta,\varphi)\frac{e^{-jkr}}{r}\right)=e^{-jkr}\nabla\times\left(\frac{\underline{E}_0(\vartheta,\varphi)}{r}\right)+\nabla\left(e^{-jkr}\right)\times\frac{\underline{E}_0(\vartheta,\varphi)}{r}=\left(-jke^{-jkr}\underline{i}_r\right)\times\frac{\underline{E}_0(\vartheta,\varphi)}{r}$$

La precedente espressione è stata ottenuta considerando che il primo termine varia poco con la distanza (in quanto il gradiente del termine 1/r è molto meno variabile rispetto al gradiente del termine esponenziale), e che soprattutto il gradiente di $\underline{E}_0(\theta,\varphi)/r$ è in sostanza proporzionale ad $1/r^2$, e quindi a grande distanza lo trascuro rispetto al gradiente dell'esponenziale che è l'esponenziale stesso (avrei una somma del tipo $\nabla\times\underline{E}_\infty(\vartheta,\varphi,r)=e^{-jkr}\left(A(\vartheta,\varphi)+B(\vartheta,\varphi)/r^2\right)$).

Per cui a grande distanza nelle equazioni di Maxwell posso sostituire:

$$\nabla\rightarrow -jk\underline{i}_r$$

CAMPO LONTANO GENERATO DA UNA APERTURA

Campo Lontano nel Vuoto

Per calcolare il campo lontano di una distribuzione di sorgenti si può partire dal potenziale vettore e ricordare che i campi variano essenzialmente (ovvero a meno di termini di ordine superiore) come e^{-jkr}.

Pertanto l'operatore nabla che agirà sui campi può essere sostituito da:

$$\nabla \rightarrow -jk\underline{i}_r$$

Con tale semplificazione le relazioni fra campi e potenziali, a grande distanza, non sono più differenziali, ma finite.

CAMPO LONTANO GENERATO DA UNA APERTURA

Campo Lontano nel Vuoto

In presenza di sorgenti elettriche e magnetiche (e quindi con i potenziali vettori **A** ed **F** entrambi diversi da zero) si ha:

$$\underline{E} = -j\omega\underline{A} - \nabla\phi + \nabla\times\underline{F} = -j\omega\left[\underline{A} + \frac{1}{k^2}\nabla\left(\nabla\cdot\underline{A}\right)\right] + \nabla\times\underline{F}$$

$$\underline{H} = \frac{1}{\mu}\nabla\times\underline{A} + j\omega\varepsilon\underline{F} + \nabla\phi_m = \frac{1}{\mu}\nabla\times\underline{A} + j\omega\varepsilon\left[\underline{F} + \frac{1}{k^2}\nabla\left(\nabla\cdot\underline{F}\right)\right]$$

che in campo lontano (dove posso approssimare $\nabla \rightarrow -jk\underline{i}_r$) diventano:

$$\underline{E} = -j\omega\left[\underline{A} - \underline{i}_r\left(\underline{i}_r\cdot\underline{A}\right)\right] - jk\underline{i}_r\times\underline{F}$$

$$\underline{H} = \frac{-jk}{\mu}\underline{i}_r\times\underline{A} + j\omega\varepsilon\left[\underline{F} - \underline{i}_r\left(\underline{i}_r\cdot\underline{F}\right)\right]$$

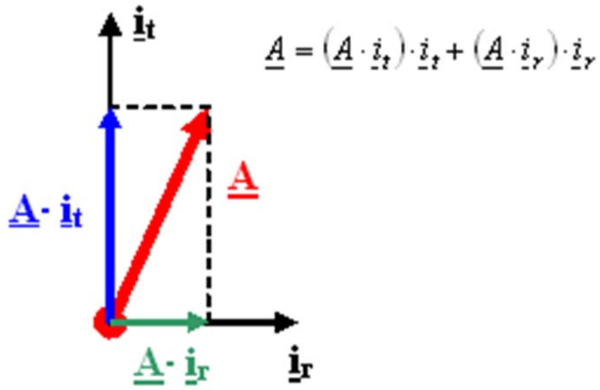
CAMPO LONTANO GENERATO DA UNA APERTURA

Campo Lontano nel Vuoto

Si introduce la matrice $\underline{\underline{I}} - \underline{i}_r \underline{i}_r$, che elimina da un vettore la sua componente radiale ottenendo:

$$\underline{E} = -j\omega\left(\underline{\underline{I}} - \underline{i}_r \underline{i}_r\right)\cdot \underline{A} - jk\underline{i}_r \times \underline{F}$$

$$\underline{H} = \frac{-jk}{\mu}\underline{i}_r \times \underline{A} + j\omega\varepsilon\left(\underline{\underline{I}} - \underline{i}_r \underline{i}_r\right)\cdot \underline{F}$$



Ovviamente **A** ed **F** sono calcolate in campo lontano, quindi si può porre nella loro espressione:

$$\frac{1}{\left|\underline{r} - \underline{r}_0\right|} \rightarrow \frac{1}{r} \qquad\qquad e^{-jk_0\left|\underline{r}-\underline{r}_0\right|} \rightarrow e^{-jk_0 r} e^{jk_0 \underline{i}_r \cdot \underline{r}_0}$$

CAMPO LONTANO GENERATO DA UNA APERTURA

Campo Lontano nel Vuoto

Nel caso di sole sorgenti magnetiche le precedenti si riducono alle:

$$\underline{E} = \nabla \times \underline{F} = -jk\underline{i}_r \times \underline{F}$$

$$\underline{H} = j\omega\varepsilon\underline{F} + \nabla\phi_m = j\omega\varepsilon\underline{F} + (-jk\underline{i}_r)\frac{k}{\omega\mu}\underline{i}_r \cdot \underline{F}$$

$$\nabla \cdot \underline{F} + j\omega\mu\phi_m = 0 \quad \rightarrow \quad \phi_m = -\frac{-jk\underline{i}_r \cdot \underline{F}}{j\omega\mu} = \frac{k}{\omega\mu}\underline{i}_r \cdot \underline{F}$$

Dalle espressioni appena ottenute si vede che il campo elettrico **E** è ortogonale al piano formato dal potenziale vettore magnetico e dalla direzione del punto campo (è infatti dato dal termine).

Il campo magnetico **H** è invece la parte traversa del potenziale vettore magnetico, infatti $\underline{H} \propto \underline{F} - \underline{i}_r(\underline{i}_r \cdot \underline{F})$ (ossia **H** è pari ad **F** meno la componente radiale di **F**, cioè alla componente traversa del potenziale vettore).

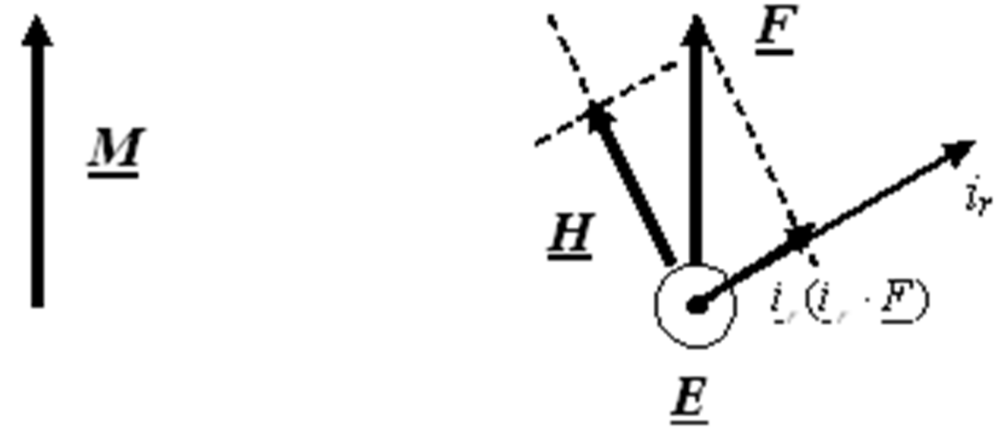
CAMPO LONTANO GENERATO DA UNA APERTURA

Campo Lontano nel Vuoto

Quindi per un dato dipolo magnetico **M**:

- **F** è parallelo ad **M**
- **H** è traverso ad **F** in una data direzione $\underline{\mathbf{i}}_r$
- **E** è ortogonale ad **F**.

Ad esempio:



CAMPO LONTANO GENERATO DA UNA APERTURA

Campo Lontano nel Vuoto

Questo vale ovviamente a grande distanza dalla sorgente **M**.

Il potenziale vettore magnetico a grande distanza dovuto ad un dipolo magnetico vale:

$$\underline{F} = -\frac{1}{4\pi}\underline{M}_0 \frac{1}{r} e^{-jkr} e^{jk\underline{i}_r \cdot \underline{r}_0}$$

dove $r\underline{\mathbf{i}}_r$ è il vettore che individua il punto campo ed $\underline{\mathbf{r}}_0$ è il vettore che individua il punto sorgente.

Se ho a che fare con una sorgente estesa anziché con un dipolo, dovrò integrare la precedente espressione nel volume della sorgente per ottenere il potenziale vettore a grande distanza:

$$\underline{F} = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{r} e^{-jkr} \int_{V_0} \underline{M}_0(\underline{r}_0) e^{jk\underline{i}_r \cdot \underline{r}_0} dV_0$$

CAMPO LONTANO GENERATO DA UNA APERTURA

Campo Lontano di una Apertura Piana

Dal Teorema di Equivalenza sappiamo che possiamo sostituire una apertura in uno schermo con una distribuzione di correnti elettriche e magnetiche superficiali le quali possono sempre essere fatte irradiare nel vuoto.

Conviene allora calcolare il campo di una distribuzione di correnti elettriche $\underline{\mathbf{J}}_s$ o magnetiche $\underline{\mathbf{M}}_s$ poste sul piano z=0, e in particolare il campo lontano.

Sappiamo che basta allora calcolare $\underline{\mathbf{A}}_\infty$ o, rispettivamente, $\underline{\mathbf{F}}_\infty$, che valgono:

$$\underline{A}_\infty = \frac{\mu}{4\pi} \cdot \left(\int_\Sigma \underline{J}_s(\underline{r}') e^{jk_0 \underline{i}_r \cdot \underline{r}'} dS' \right) \cdot \frac{e^{-jk_0 r}}{r}$$

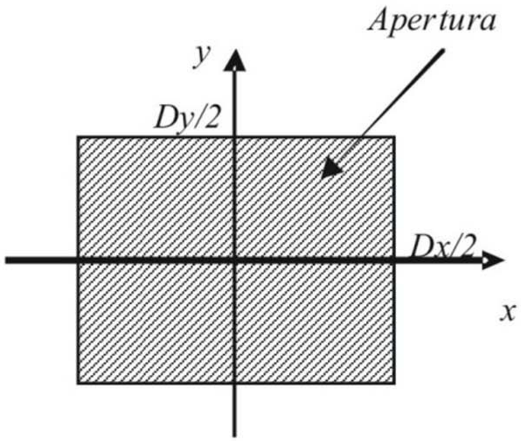
$$\underline{F}_\infty = -\frac{1}{4\pi} \cdot \left(\int_\Sigma \underline{M}_s(\underline{r}') e^{jk_0 \underline{i}_r \cdot \underline{r}'} dS' \right) \cdot \frac{e^{-jk_0 r}}{r}$$

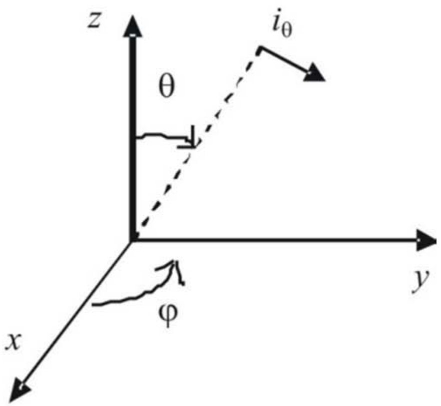
essendo Σ la parte di piano in cui le correnti sono diverse da zero.

CAMPO LONTANO GENERATO DA UNA APERTURA

Campo Lontano di una Apertura Piana

Vediamo alcuni casi particolari, assumendo Σ pari ad un rettangolo di dimensioni Dx, Dy.





Supponiamo la corrente elettrica costante sull'apertura: $\underline{J}_s(\underline{r}') = J_{s0}\,\underline{i}_x$

Il potenziale vettore elettrico corrispondente vale:

$$\underline{A}_\infty = \frac{\mu}{4\pi}\frac{e^{-jk_0 r}}{r}\int_{-\frac{D_x}{2}}^{\frac{D_x}{2}}\int_{-\frac{D_y}{2}}^{\frac{D_y}{2}} e^{jk_0\,\underline{i}_r\cdot\underline{r}'}\,dS'\,J_{s0}\,\underline{i}_x$$

CAMPO LONTANO GENERATO DA UNA APERTURA

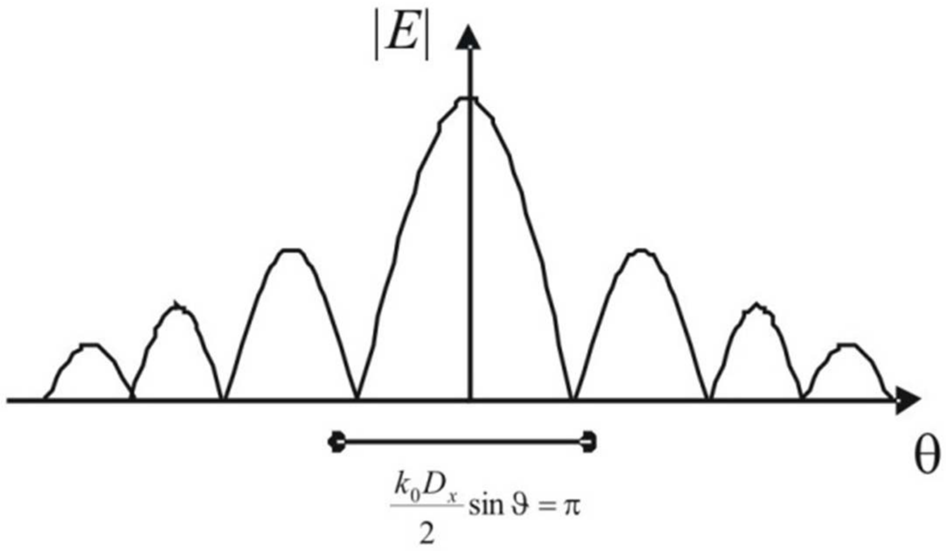
Campo Lontano di una Apertura Piana

L'integrale vale:

$$f(\vartheta,\varphi) = \int_{-\frac{D_x}{2}}^{\frac{D_x}{2}} \int_{-\frac{D_y}{2}}^{\frac{D_y}{2}} e^{jk_0(x'\sin\vartheta\cos\varphi + y'\sin\vartheta\sin\varphi)} dy' dx' = D_x \sin c\left(\frac{k_0 D_x}{2}\sin\vartheta\cos\varphi\right) D_y \sin c\left(\frac{k_0 D_y}{2}\sin\vartheta\sin\varphi\right)$$

Il campo ha quindi un massimo per θ=0 e risulta linearmente polarizzato.

Il suo modulo ha quindi un andamento del tipo:



CAMPO LONTANO GENERATO DA UNA APERTURA

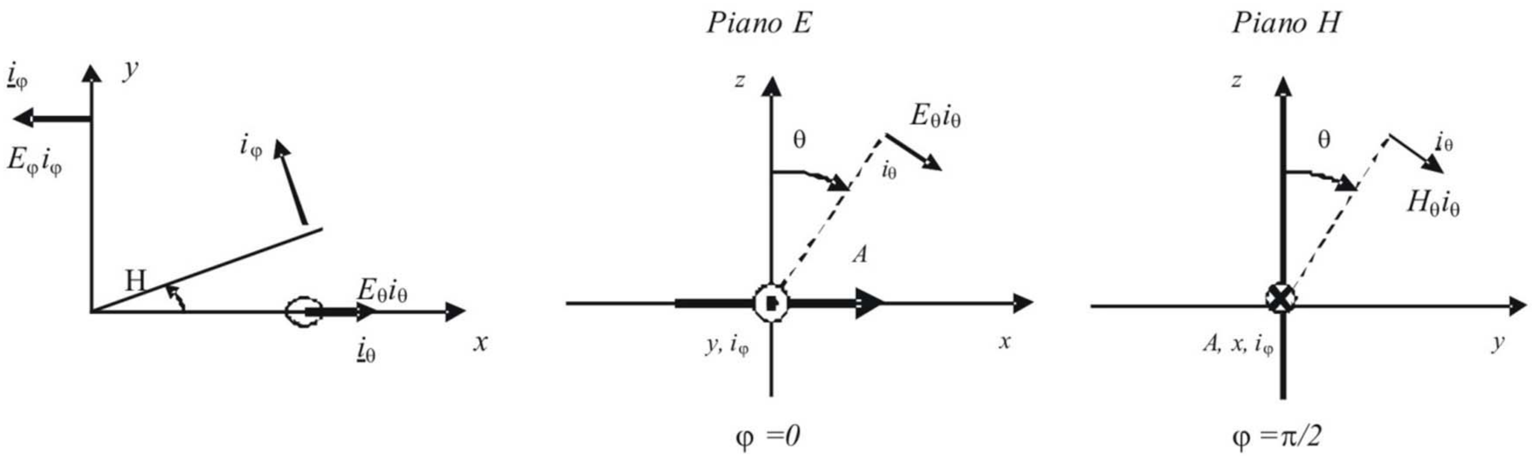
Campo Lontano di una Apertura Piana

La direzione del campo si ottiene da:

$$\left(\underline{\underline{I}} - \underline{i}_r \underline{i}_r\right) \cdot \underline{i}_x = \underline{i}_x - \underline{i}_r \sin\vartheta\cos\varphi$$

e sostituendo l'espressione del vettore cartesiano $\underline{\mathbf{i}}_x$ in coordinate sferiche ($\underline{i}_x = \underline{i}_r \sin\vartheta\cos\varphi + \underline{i}_\vartheta \cos\vartheta\cos\varphi - \underline{i}_\varphi \sin\varphi$) si ottiene come direzione del campo:

$$\left(\underline{\underline{I}} - \underline{i}_r \underline{i}_r\right) \cdot \underline{i}_x = \underline{i}_\vartheta \cos\vartheta\cos\varphi - \underline{i}_\varphi \sin\varphi$$



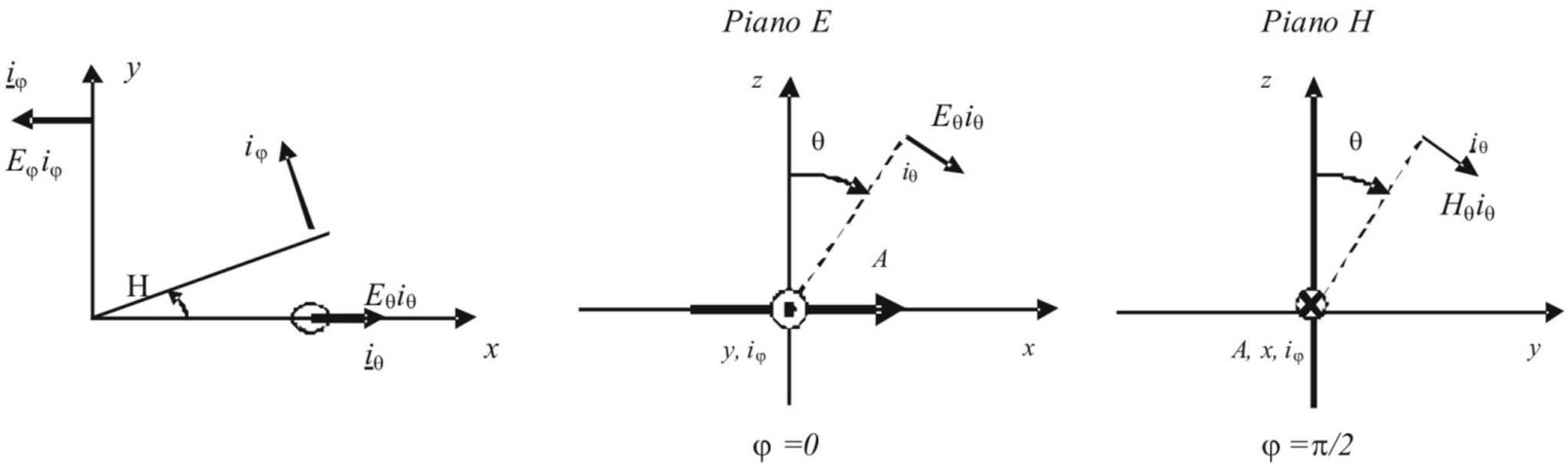
CAMPO LONTANO GENERATO DA UNA APERTURA

Campo Lontano di una Apertura Piana

Quindi per φ=0 il campo ha solo componente θ, e si trova proprio nel piano φ=0. Tale piano prende il nome di Piano E della apertura.

Per $\varphi=\pi/2$, invece, il campo elettrico ha solo componente φ ed è quindi ortogonale al piano $\varphi=\pi/2$.

Quindi è ora il campo magnetico H a giacere in questo piano, che pertanto prende il nome di Piano H della apertura.



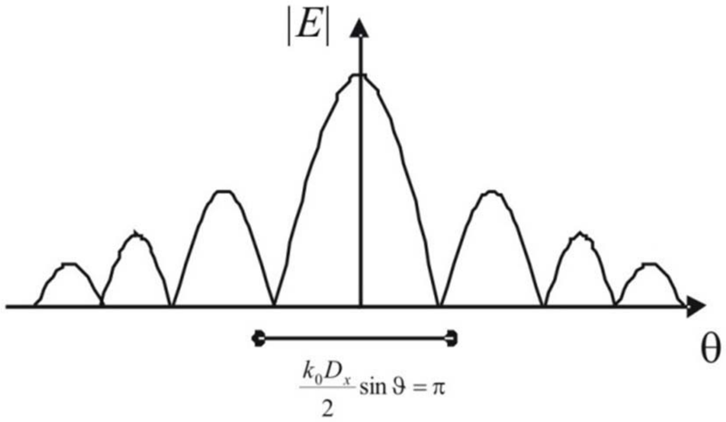
CAMPO LONTANO GENERATO DA UNA APERTURA

Campo Lontano di una Apertura Piana

Il lobo centrale si estende fino a dove le due funzioni sinc() si annullano, ossia fino a:

$$\frac{k_0 D_x}{2}\sin\vartheta = \pi \qquad \varphi=0$$

$$\frac{k_0 D_y}{2}\sin\vartheta = \pi \qquad \varphi=\pi/2$$



Al crescere di Dx diminuisce l'angolo sotteso dal lobo principale, ovvero aumenta la direttività dell'apertura, e analogamente per Dy.

In particolare, se Dx > Dy, il lobo è più stretto nel piano E che nel piano H.

CAMPO LONTANO GENERATO DA UNA APERTURA

Campo Lontano di una Apertura Piana

Supponiamo ora che la corrente elettrica sia costante e diretta lungo l'asse y:

$$\underline{J}_s(\underline{r}') = J_{s0}\,\underline{i}_y$$

Cambia solo la direzione del campo (e quindi le definizioni dei piani E ed H):

$$\left(\underline{\underline{I}} - \underline{i}_r\underline{i}_r\right)\cdot\underline{i}_y = \underline{i}_y - \underline{i}_r \sin\vartheta\sin\varphi$$

e sostituendo l'espressione del vettore cartesiano $\underline{\mathbf{i}}_y$ in coordinate sferiche ($\underline{i}_y = \underline{i}_r \sin\vartheta\sin\varphi + \underline{i}_\vartheta \cos\vartheta\sin\varphi + \underline{i}_\varphi \cos\varphi$) si ottiene come direzione del campo:

$$\left(\underline{\underline{I}} - \underline{i}_r\underline{i}_r\right)\cdot\underline{i}_y = \underline{i}_\vartheta \cos\vartheta\sin\varphi + \underline{i}_\varphi \cos\varphi$$

In generale si avrà quindi:

$$E_\vartheta = -j\omega\cos\vartheta\left(A_x\cos\varphi + A_y\sin\varphi\right)$$

$$E_\varphi = -j\omega\left(-A_x\sin\varphi + A_y\cos\varphi\right)$$

CAMPO LONTANO GENERATO DA UNA APERTURA

Campo Lontano di una Apertura Piana

Supponiamo ora di avere una corrente magnetica costante diretta lungo l'asse y:

$$\underline{M}_s(\underline{r}') = M_{s0}\,\underline{i}_y$$

Il potenziale vettore magnetico corrispondente vale:

$$\underline{F}_\infty = -\frac{1}{4\pi}\frac{e^{-jk_0 r}}{r}\int_{-\frac{D_x}{2}}^{\frac{D_x}{2}}\int_{-\frac{D_y}{2}}^{\frac{D_y}{2}} e^{jk_0\,\underline{i}_r\cdot\underline{r}'}\,dS'\,M_{s0}\,\underline{i}_y = -\frac{1}{4\pi}\,f(\vartheta,\varphi)\frac{e^{-jk_0 r}}{r}M_{s0}\,\underline{i}_y$$

dove la f(θ,φ) è la stessa del caso di corrente elettrica.

<u>Le proprietà direzionali di una apertura dipendono quindi dalle dimensioni dell'apertura e dalla variazione della corrente sull'apertura stessa, e non dalla natura di tale corrente.</u>

Noto **<u>F</u>**, il campo elettrico prodotto da tale corrente magnetica vale:

$$\underline{E} = -jk_0\,\underline{i}_r \times \underline{F}$$